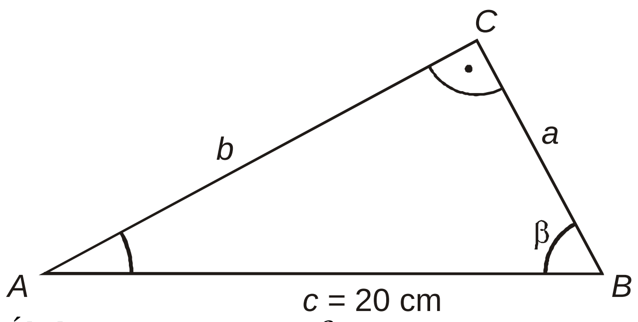
4.3.14 Úlohy o pravoúhlém trojúhelníku II

Předpoklady: 040313

Př. 1: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* má pravý úhel při vrcholu *C* a přeponu délky 20 cm. Urči jeho zbývající strany a úhly v trojúhelníku, jestliže úhel β má velikost $77°$.

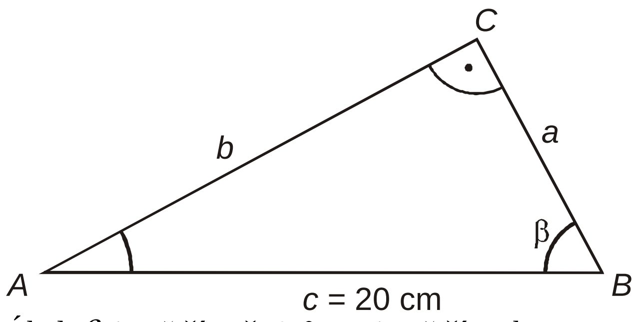


Úhel α: $\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 77° = 13°$.

Strana *b*: $\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin\beta = 20 \cdot \sin 77°\ \text{cm} = 19,49\,\text{cm}$.

Strana *a*: $\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\beta = 20 \cdot \cos 77°\ \text{cm} = 4,50\,\text{cm}$.

Př. 2: Prohlédni si obrázek trojúhelníku v předchozím příkladu. Jaké hodnoty u hledaných stran a úhlů můžeme očekávat?

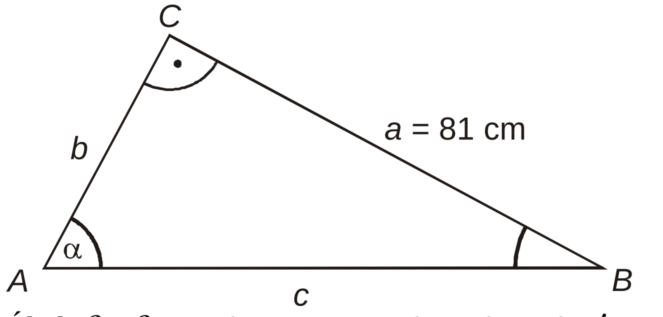


Úhel β je větší než $45°$ $\Rightarrow$ je větší z obou nepravých úhlů $\Rightarrow$

- úhel $\alpha < 45°$,
- $a < b < c$.

Pedagogická poznámka: Netrvám na to, aby si žáci v dalších příkladech odhady psali, ale snažím se upozornit všechny, kteří udělají chybu, že ji mohli většinou předejít, právě kontrolním odhadem.

Př. 3: Pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem γ a s úhlem $\alpha = 61°17'$ má velikost odvěsny $a = 81\,\text{cm}$. Urči jeho ostatní strany a úhly.

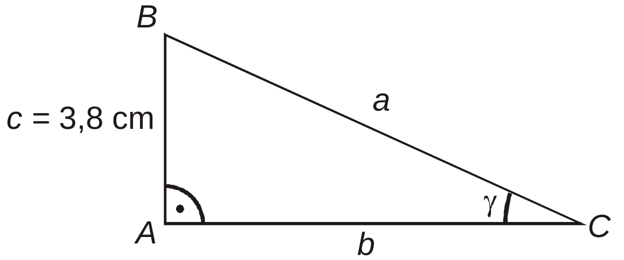


Úhel β: $\beta = 180° - \gamma - \alpha = 180° - 90° - 61°17' = 28°43'$.

Strana *b*: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{tg}\alpha = a \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{81}{\operatorname{tg}61°17'}\,\text{cm} = 44{,}38\,\text{cm}$.

Strana *c*: $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{81}{\sin 61°17'}\,\text{cm} = 92{,}36\,\text{cm}$.

Př. 4: Pro pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem α platí: $\gamma = 38°$, $c = 3{,}8\,\text{cm}$. Urči zbývající strany a úhly.

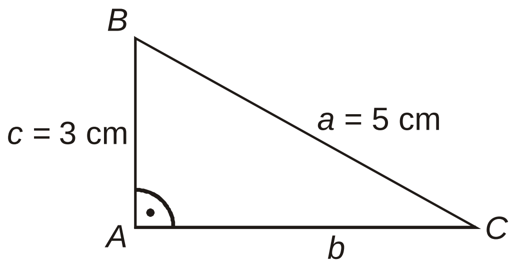


Úhel β: $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 90° - 38° = 52°$.

Strana *c*: $\sin\gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot \sin\gamma = c \Rightarrow a = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{3{,}8}{\sin 38}\,\text{cm} = 6{,}17\,\text{cm}$.

Strana *b*: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{tg}\gamma = c \Rightarrow b = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{3{,}8}{\operatorname{tg}38°}\,\text{cm} = 4{,}86\,\text{cm}$.

Př. 5: Pro pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem α platí: $a = 5\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$. Urči zbývající strany a úhly.

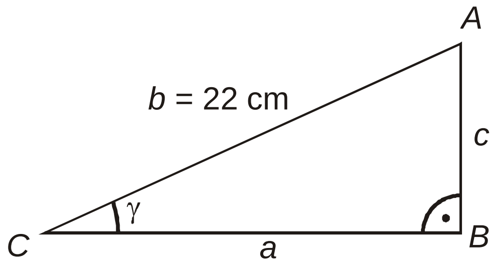


Strana *b*: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow b = 4\,\text{cm}$

Úhel β: $\cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 53°8'$

Úhel γ: $\sin\gamma = \frac{c}{a} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 36°52'$

Př. 6: Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem β platí: $b = 22$ cm, $\gamma = 27°42'$. Urči zbývající strany a úhly.

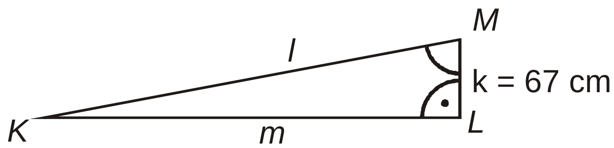


Úhel α: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 90° - 27°42' = 62°18'$.

Strana c: $\sin\gamma = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cdot \sin\gamma = 22 \cdot \sin 27°42' \text{ cm} = 10,23 \text{ cm}$.

Strana a: $\cos\gamma = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \cos\gamma = 22 \cdot \cos 27°42' \text{ cm} = 19,48 \text{ cm}$.

Př. 7: Pro pravoúhlý trojúhelník KLM platí: $|\sphericalangle KLM| = 90°$, $|\sphericalangle LMK| = 81°19'$, $k = 67$ cm. Urči zbývající strany a úhly.

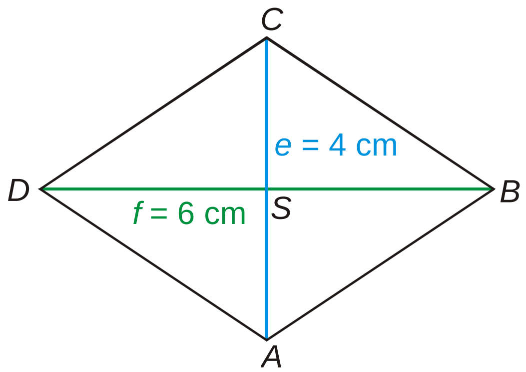


Úhel $\sphericalangle MKL$: $\sphericalangle MKL = 180° - \sphericalangle KLM - \sphericalangle LMK = 180° - 90° - 81°19' = 8°41'$.

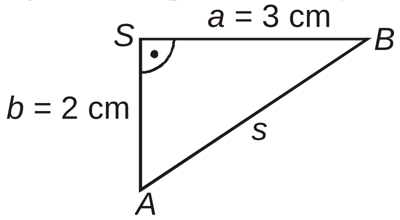
Strana m: $\operatorname{tg}(\sphericalangle LMK) = \frac{m}{k} \Rightarrow m = k \cdot \operatorname{tg}(\sphericalangle LMK) = 67 \cdot \operatorname{tg}(81°19') \text{ cm} = 438,70 \text{ cm}$.

Strana l:
$$\cos(\sphericalangle LMK) = \frac{k}{l} \Rightarrow l \cdot \cos(\sphericalangle LMK) = k \Rightarrow l = \frac{k}{\cos(\sphericalangle LMK)} = \frac{67}{\cos(81°19')} \text{ cm} = 443,79 \text{ cm}.$$

Př. 8: V kosočtverci *ABCD* platí: $e = 6\text{ cm}$, $f = 4\text{ cm}$. Urči stranu kosočtverce a velikosti jeho vnitřních úhlů.



Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí $\Rightarrow$ rozdělí trojúhelník na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky (například trojúhelník *ABS*).



Strana *s*: $s^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 13 \Rightarrow s = \sqrt{13} \doteq 3{,}61$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56°19'$

$\beta = 90° - 56°19' = 33°41'$

Vnitřní úhly kosočtverce jsou složeny vždy ze dvou stejných úhlů v trojúhelníku $\Rightarrow$ mají dvoj násobnou velikost.

Strana kosočtverce má délku $\sqrt{13}\text{ cm}$, jeho vnitřní úhly mají velikost $112°38'$ a $67°22'$.

Shrnutí: Při řešení úloh o pravoúhlém trojúhelníku je důležitý správně nakreslený trojúhelník.